ENSA-ALHOCEIMA	ANALYSE 4
CPII.	SEMESTRE 4

Exercice 1

Déterminer si les formes différentielles suivantes sont exactes et dans ce cas, les intégrer:

$\omega_1 = 2xy\,dx + x^2\,dy$,

$\omega_2 = xy\,dx - z\,dy + xz\,dz$,

$\omega_3 = 2xe^{x^2-y}\,dx - 2e^{x^2-y}\,dy$,

$\omega_4 = yz^2\,dx + (xz^2 + z)\,dy + (2xyz + 2z + y)\,dz$.

Exercice 2

On considère le changement de variables en coordonnées sphériques suivant :

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

1- Calculer dx, dy et dz.

2- Montrer que : $xdx + ydy + zdz = rdr$

3- En déduire : $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}$ et $\frac{\partial r}{\partial z}$.

Exercice 3

On considère la forme différentielle : $\omega = (x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy$

1- Montrer que ω n'est pas exacte.

2- Trouver une fonction $\psi(x)$ telle que $\psi(x)\omega$ soit exacte.

3- Déterminer une fonction f telle que : $\psi(x)\omega = df$.

Exercice 4

Soit $\omega = yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz$ une forme différentielle sur $\mathbb{R}^3$.

1- Calculer l'intégrale de ω le long de l'hélice H paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \quad avec\ t\epsilon\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ z(t) = t \end{cases}$$

2- Montrer que ω est exacte et déterminer son potentiel f.

3- En déduire une autre méthode pour calculer : $I = \int_H \omega$.

Exercice 5

Soit la forme différentielle suivante : $\omega = (1 + y)dx + (2 - x)dy$ sur $\mathbb{R}^2$.

1- ω est-elle exacte ?

2- Calculer l'intégrale de ω du point $A(0,0)$ au point $B(2,4)$ le long des chemins suivants :

a- γ_1 est la droite d'équation : $y = 2x$.

b- γ_2 est la parabole d'équation : $y = x^2$.

c- γ_3 est la ligne brisée constituée des droites : $x = 0$ et $y = 4$.

Exercice 6

1- On considère le champ vectoriel : $\vec{V}(x, y) = (1 + 2xy, x^3 - 3)$

Ce champ est-il un champ de gradient ?

2- Montrer que le champ de vecteurs $\vec{F}(x, y) = (3 + 2xy, x^2 - 3y^2)$ dérive d'un potentiel et déterminer ses potentiels.

Exercice 7

Déterminer le champ vectoriel $\overrightarrow{grad} f$, dans les cas suivants :

a- $f(x, y, z) = 1 + x + xy + xyz$.

b- $f(x, y, z) = xy + xz + yz$

c- $f(x, y) = \cos x + \sin y$.

Exercice 8

Calculer la circulation des champs $\vec{V}(x, y)$ le long du cercle (C) de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens direct.

1) $\vec{V}(x, y) = (3x, x + y)$

2) $\vec{V}(x, y) = (x^2y, xy)$

Exercice 9

En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer :

1- $\oint_{\mathbb{\Gamma}} x^2\, dx + xy\, dy$ où $\mathbb{\Gamma}$ est le bord du carré $[0,1] \times [0,1]$ parcouru dans le sens trigonométrique.

2- L'aire de l'ellipse pleine $(\xi): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$

3- L'aire de la cycloïde représentée paramétriquement par :

$$\gamma: [0,4\pi] \to \mathbb{R}^2: \begin{cases} \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \end{cases} & : t \epsilon [0,2\pi] \\ \begin{cases} x(t) = 4\pi - t + \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases} & : t \epsilon [2\pi, 4\pi] \end{cases}$$